

MENENTUKAN DISTRIBUSI TEMPERATUR DENGAN METODE NUMERIK

R. Wakhid Akhdinirwanto

Program Studi Pendidikan Fisika Univ Muhammadiyah Purworejo

Email: r_wakhid_a@yahoo.com

Telah dilakukan perhitungan temperatur pada balok. Perhitungan ini dilakukan dengan metode numerik. Tujuannya adalah menentukan temperatur pada titik-titik penyebaran pada ruang konduktor berbentuk balok. Metode numerik yang digunakan adalah iterasi Gauss Seidel. Pendekatan perhitungan iterasi Gauss Seidel ini kemudian dibandingkan dengan perhitungan teoritis melalui persamaan Laplace.

Hasil perhitungan distribusi temperatur ini berbentuk grafik simetris, dimana temperatur tertinggi berada pada titik yang dikenai temperatur tinggi tersebut, kemudian menyebar secara merata di sekelilingnya.

Kata kunci: distribusi temperatur, metode numerik

Pendahuluan

Terdapat tiga jenis perpindahan panas, konduksi, konveksi, dan radiasi. Aliran panas secara konduksi terjadi jika bagian-bagian benda berada pada suhu tidak sama sehingga terjadi hantaran (konduksi) panas pada benda tersebut. Konduksi panas terjadi pada bahan-bahan yang bersifat konduktor. Konveksi adalah proses perpindahan panas dari suatu tempat ke tempat lain karena perpindahan bahan. Biasanya terjadi pada zat yang bisa mengalir atau alir. Sedang radiasi adalah pancaran (emisi) panas secara terus menerus yang terjadi pada semua permukaan benda. Radiasi panas ini biasanya dalam bentuk gelombang elektromagnetik yang bergerak dengan kecepatan cahaya.

Makalah ini membahas distribusi temperatur akibat aliran panas yang bersifat konduksi. Kreith mengatakan, ada empat macam dalam menentukan temperatur, yaitu metode teoritis, grafik, analogi, dan numerik. Bahasan dalam makalah ini

adalah penghitungan temperatur secara numerik dengan menggunakan pendekatan Gauss Seidel.

Aliran Panas

Hukum dasar aliran panas secara konduksi pertama kali ditemukan oleh Fourier pada tahun 1822 (Kreith, 1822). Persamaan dasarnya adalah

$$q_k = -kA \frac{dT}{dx} \quad 1$$

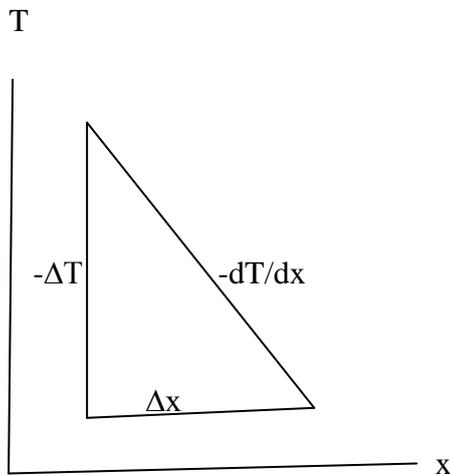
q_k adalah aliran panas konduksi atau arus panas (dQ/dt), k konduktivitas termal suatu bahan, A luas penampang yang dialirai panas, dan dT/dx gradien suhu.

Gradient suhu adalah cepat perubahan temperatur (dT) sesuai dengan perubahan jarak dx . Secara grafik, gradien suhu dinyatakan oleh kemiringan grafik T terhadap x di sebarang koordinat T dan x .

Konduktivitas termal atau daya hantar panas (k) didefinisikan sebagai arus panas persatuan luas tegak lurus pada arah aliran dan persatuan gradien suhu.

$$k = - \frac{q_k}{AdT/dx} \quad 2$$

Menurut hokum II Termodinamika, aliran panas akan mengalir dengan sendirinya dari titik yang tinggi suhunya ke titik yang lebih rendah. Aliran panas akan positif ketika gradien suhu positif.



Gambar 1. Gradien suhu

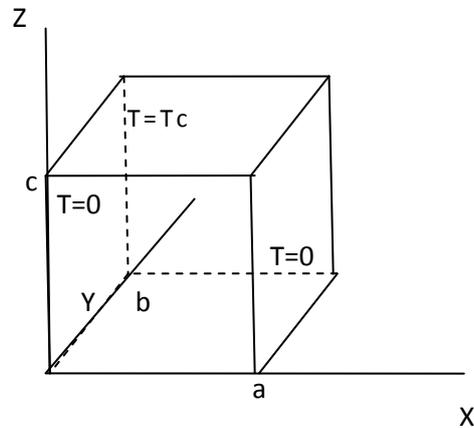
dalam keadaan steady state aliran panas suatu bahan sama pada semua penampang lintang, sehingga jumlah panas yang mengalir masuk ke suatu bahan sama dengan jumlah panas yang keluar dari bahan tersebut. Jadi, aliran panas pada suatu bahan sama dengan aliran fluida yang tidak dapat dimampatkan. Jika luas penampang A konstan, konduktivitas termal k tetap (karena bahan tetap) dan tak bergantung suhu, maka gradient suhu dT/dx sama di semua penampang lintang. Jadi suhu akan berkurang secara linier di sepanjang bahan tersebut dan gradient suhu dalam keadaan tetap $(T_2-T_1)/L$, dimana T_1 suhu awal, T_2 suhu akhir, dan L panjang bahan yang dialiri. Dengan demikian persamaan aliran panas dalam steady state adalah

$$q_k = kA \frac{T_2 - T_1}{L} \quad 3$$

Konduksi Panas dalam Persamaan Laplace

Jika balok dengan sisi-sisi a , b , c , berturut-turut dari sumbu X , Y , Z , diberi panas pada salah satu sisinya, sedang yang lain tidak diberi panas atau dibiarkan, maka suhu akan mengalir ke segala arah. Untuk mempermudah perhitungan digunakan syarat batas berikut. Pada koordinat $z = c$ suhunya T_c , bidang lain 0 . Penyelesaian menggunakan syarat batas :

$$T(x=0) = T(y=0) = T(x=a) = T(y=b) = 0, \text{ dan } T(z=c) = T_c$$



Gambar 2. Balok diberi suhu pada $z = c$, sisi lain dibiarkan

Untuk kondisi $T(0,y,z) = T(a,y,z) = 0$ mengisyaratkan bahwa x tergantung dari

$$X(x) = \sin(m\pi x/a). \quad 4$$

Untuk $T(x,0,z) = T(x,b,z) = 0$ mengisyaratkan bahwa y tergantung dari

$$Y(y) = \sin(n\pi y/b). \quad 5$$

Dari persamaan 4 dan 5 diperoleh persamaan

$$k_z = \pm j\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \quad 6$$

Karena $X(x)$ dan $Y(y)$ merupakan fungsi trigonometri (eksponensial imajiner), maka persamaan Laplace dengan syarat batas $T(x,y,0)$ hanya dipenuhi bila fungsi eksponensial real, yaitu:

$$Z(z) = \sinh\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}/z \quad 7$$

Perhitungan dari $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ tersebut menghasilkan zona harmonis

$$N(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$= \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) + \sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} / z \quad 8$$

Penyelesaian dalam bentuk suhu adalah:

$$T(x, y, z) = \sum_{m=1} \sin(m\pi x/a) \sum_{n=1} \sin(n\pi y/b) \sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} / z \quad 9$$

Untuk $z = c$, maka $T(x, y, z) = T_c = \text{konstan}$, sehingga dapat dinyatakan

$$T_c = \sum_{m=1} F(m, y, 0) \sin(m\pi x/a) \quad 10$$

Dengan $F(m, y, 0) = F_m$, maka:

$$F_m = \sum_{n=1} E_{mn} \sinh \sqrt{k_{xm}^2 + k_{yn}^2} \cdot z \sin(n\pi y/b) \quad 11$$

Persamaan 11 adalah deret Fourier dari gelombang kuadrat dengan periode $2a$ dan amplitude T_c , sehingga:

$$F_m = F_{m0} = \begin{cases} \frac{4T_c}{m\pi}, & m = 2k + 1 \\ 0, & m = 2k \end{cases} \quad 12$$

yang tak gayut terhadap y .

Persamaan 11 juga merupakan persamaan gelombang dengan periode $2b$ dan amplitude F_m . Selanjutnya:

$$\sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \cdot c = \begin{cases} \frac{4F_m}{n\pi} = \frac{4}{n\pi} \frac{4}{m\pi} T_c, & m = 2k + 1; n = 2k + 1 \\ 0, & m \text{ atau } n = 2k \end{cases} \quad 13$$

Dari persamaan 13 diperoleh:

$$E_{mn} = \frac{16T_c / \pi^2 mn}{\sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \cdot c}, \text{ untuk } m = 2k + 1 \text{ dan } n = 2k + 1 \quad 14$$

Persamaan 14 disubstitusikan ke persamaan 9, didapatkan:

$$T_1(x, y, z) =$$

$$T_1(x, y, z) =$$

$$\sum_{n=2k+1} \sum_{m=2k+1} \frac{16T_c \sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \cdot z}{\pi^2 mn \sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \cdot c} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad 15$$

Persamaan 15 ini dapat digunakan untuk menghitung distribusi suhu pada titik-titik yang berada dalam balok logam.

Suhu pada titik-titik dalam balok konduktor yang disebabkan oleh suhu pada sisi $z = 0$ dengan suhu T_{oc} adalah:

$$T_2(x, y, z) =$$

$$\sum_{n=2k+1} \sum_{m=2k+1} \frac{16T_{oc} \sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \cdot (c-z)}{\pi^2 mn \sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \cdot c} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad 16$$

Untuk suhu pada titik koordinat akibat sisi $y = b$ dengan syarat batas T_b , adalah:

$$T_3(x, y, z) =$$

$$\sum_{n=2k+1} \sum_{m=2k+1} \frac{16T_b \sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \cdot y}{\pi^2 mn \sinh \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \cdot b} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad 17$$

Persamaan 15, 16, 17 dijumlahkan akan mendapatkan suhu total:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad 18$$

Iterasi Gauss Seidel

Metode iterasi adalah suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan linear secara tidak langsung. Dalam hal tertentu metode ini lebih baik daripada metode langsung. Misalnya, untuk matrik yang tersebar dengan banyak elemen nol.

Metode iterative dimulai dengan aproksimasi untuk mendapatkan penyelesaian yang sebenarnya. Hasil iterative yang benar harus konvergen.

Sehingga hasil aproksimasi terdekat dari barisan tersebut adalah siklus dari perhitungan yang diulang-ulang sampai ketelitian yang diinginkan diperoleh.

Chapra dan Canale membagi dua jenis metode iterative, yaitu Metode Jacobi dan Metode Gauss Seidel. Makalah ini hanya akan membahas metode Gauss Seidel dalam penerapannya untuk menentukan distribusi suhu pada balok yang diberi panas.

Metode iterasi Gauss Seidel adalah jenis algoritma berulang, yang berfungsi untuk mencari akar-akar persamaan yang tidak linier. Misalnya persamaan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad 19$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Persamaan pertama dari system di atas dapat digunakan untuk menghitung x_1 sebagai fungsi dari x_2 dan x_3 . Demikian juga persamaan kedua dan ketiga untuk menghitung x_2 dan x_3 . Sehingga diperoleh:

$$x_1^1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0}{a_{11}} \quad 20$$

Nilai baru dari persamaan 4 disubstitusikan pada persamaan kedua dari persamaan 3. Dengan memberikan taksiran 0 pada x_3 diperoleh

$$x_2^1 = \frac{b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0}{a_{22}} \quad 21$$

Demikian pula untuk persamaan ketiga dari persamaan 3, disubstitusikan nilai baru x_1^1 dan x_2^1 diperoleh:

$$x_3^1 = \frac{b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1}{a_{33}} \quad 22$$

Dengan iterasi seperti ini maka komponen baru dari x selalu digunakan untuk menghitung pada suku sebelah kanan segera setelah ditemukan.

Secara grafis iterasi Gauss Seidel adalah sebagai berikut.

$$x_1^1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0}{a_{11}}$$

$$x_2^1 = \frac{b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^0}{a_{22}}$$

$$x_3^1 = \frac{b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1}{a_{33}}$$

Gambar 3. Pelukisan grafis iterasi Gauss Seidel (Chapra & Canale, 1988)

Metode iterasi ini dapat digunakan untuk mencari variable sebanyak n dengan n persamaan (Gunarto, 1993). Misalnya, system persamaan linier:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

.....

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Persamaan linier di atas dapat dibuat persamaan dalam bentuk matrik berikut.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 & b_1 & \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 & b_2 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n & b_n &
 \end{array}
 \tag{24}$$

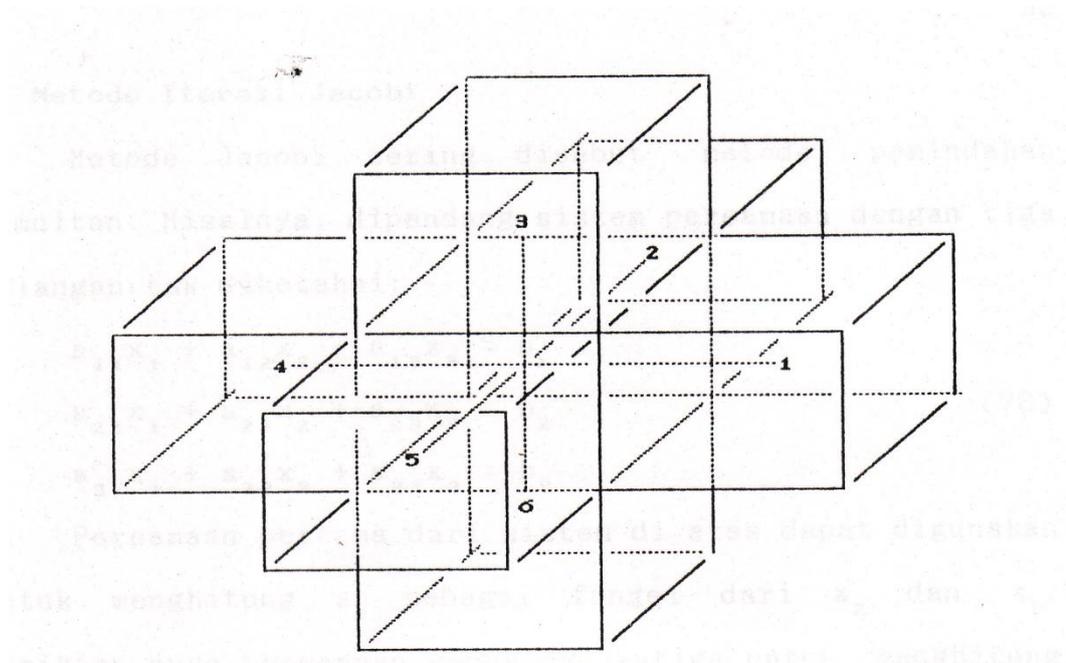
Pemecahan untuk mendapatkan x_i diberikan oleh;

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\
 x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{11}} \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 x_n &= \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn}x_n}{a_{nn}}
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Metode Penelitian

Secara garis besar materi penelitian ini adalah menghitung/menentukan distribusi suhu dalam balok konduktor. Penentuan distribusi suhu ini dilakukan

melalui tiga bidang/sisi yang berbeda. Ketiga bidang/sisi itu adalah bidang XY, XZ, dan YZ. Penghitungan dan grafis dilakukan dengan program computer.



Gambar 4. Titik-titik yang terpengaruh distribusi suhu

Hasil penelitian

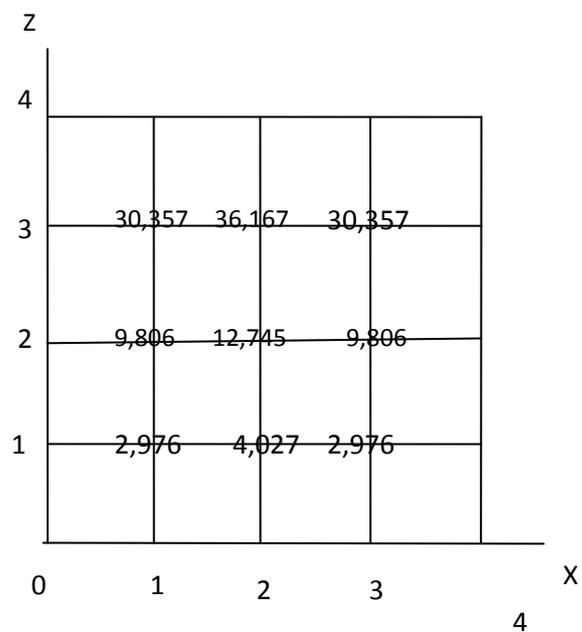
Hasil penelitian disajikan dalam bentuk tabel yang memberikan informasi tentang distribusi suhu di titik-titik koordinat dalam balok konduktor yang memerlukan syarat batas tertentu. Terdapat tiga keadaan yang akan disajikan dalam mekalah ini. Ketiga keadaan tersebut adalah sebagai berikut.

1. Untuk balok konduktor dengan sisi $z = c$ diberikan suhu 100^0 C dengan sisi lain dibiarkan tanpa diberikan suhu (0^0 C).

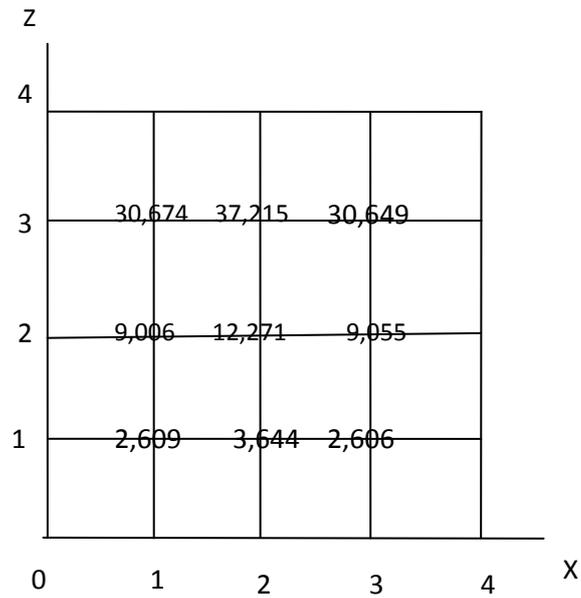
Syarat batas pada $z = c = 4$ adalah $T_c = 100^0$ C, sisi-sisi lain 0^0 C, hasil perhitungannya adalah sebagai berikut.

a. Suhu di titik koordinat untuk $z = 3$

No	X	Y	Z	T _(Numerik)		T _(Laplace)		$T_L - T_N/T_L$
				N	Hasil	I	Hasil	
1	3	3	3	14	30,357	0	30,624	0,872
2	2	3	3	14	36,169	1	37,182	2,724
3	1	3	3	14	30,357	4	30,666	1,008
4	3	2	3	14	36,169	1	37,182	2,734
5	2	2	3	14	43,557	1	44,901	2,993
6	1	2	3	14	36,169	1	37,215	2,810
7	3	1	3	14	30,357	3	30,649	0,953
8	2	1	3	14	36,169	1	37,215	2,810
9	1	1	3	14	30,357	3	30,624	1,033

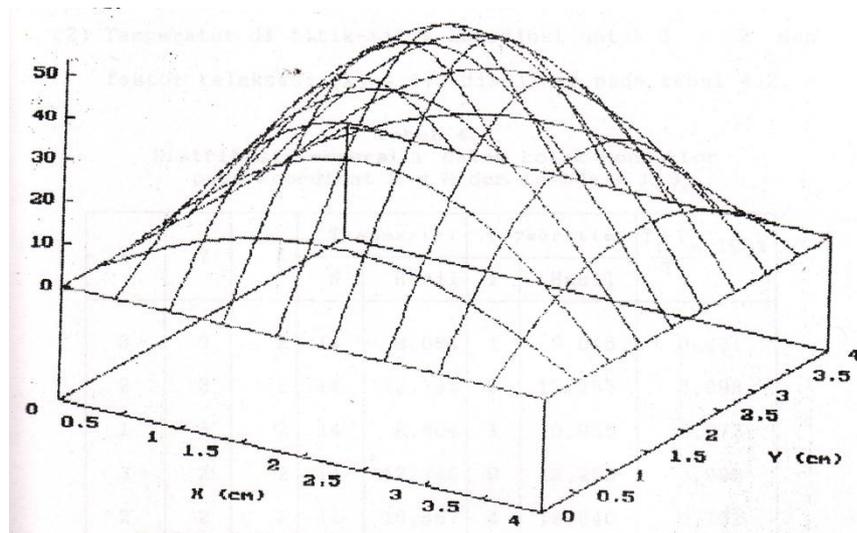


a



b.

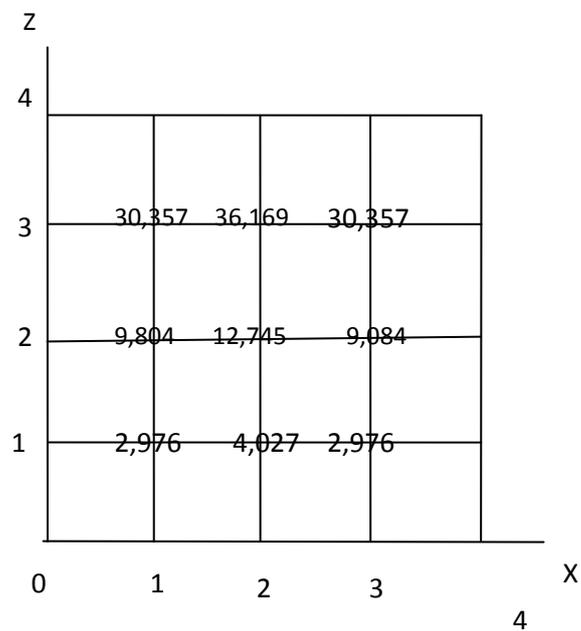
Gambar 5. Distribusi suhu dalam balok untuk $y = 1$. a. Perhitungan numeric, b. perhitungan analitis



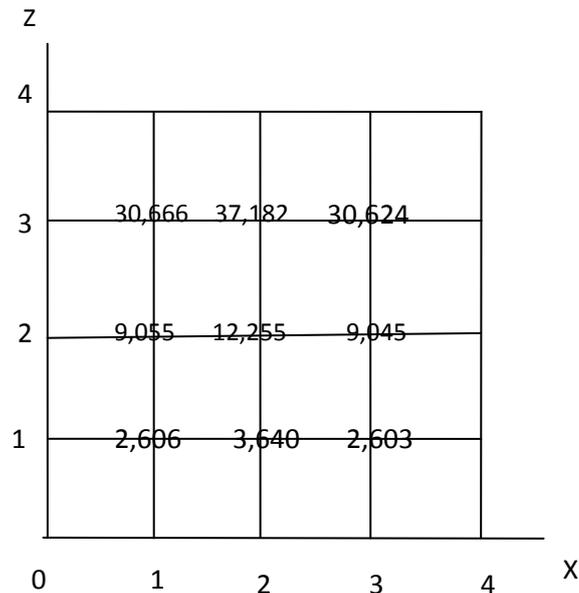
Gambar 6. Grafik distribusi suhu pada $z = 3$

b. Suhu di titik koordinat untuk $z = 1$

No	X	Y	Z	T _(Numerik)		T _(Laplace)		$T_L - T_N/T_L$
				N	Hasil	I	Hasil	
1	3	3	1	14	2,976	0	2,603	14,330
2	2	3	1	14	4,027	1	3,639	10,662
3	1	3	1	14	2,976	4	2,606	14,198
4	3	2	1	14	4,027	1	3,644	10,510
5	2	2	1	14	5,462	1	5,152	6,017
6	1	2	1	14	4,027	1	3,644	10,510
7	3	1	1	14	2,976	3	2,604	14,198
8	2	1	1	14	4,027	1	3,644	10,510
9	1	1	1	14	2,976	3	2,609	14,067



a



b.

Gambar 7. Distribusi suhu dalam balok untuk $y = 3$. a. Perhitungan numeric, b. perhitungan analitis

Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian ini adalah sebagai telah diperoleh hasil perhitungan distribusi suhu dalam balok konduktor secara numerik. Hasil perhitungan numeric ini tidak berbeda dengan hasil perhitungan secara analitis dengan persamaan Laplace.

Saran peneliti, penelitian ini perlu dikembangkan dalam bentuk simulasi, dan penentuan suhu untuk benda yang tidak teratur.

Daftar Pustaka

Chapra S.C. & Canele R.P. 1998. *Metode Numerik Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Gunarto H. 1993. *Simulasi dalam Fisika*. Yogyakarta: PPS UGM.

Koonin, S.E. 1986. *Computational Physics*. Addison-Wesley Pub. Co. Inc.

Kreith, F. 1976. *Principles of Heat Transfer (Third Edition)*. Harper & Publishers
New York. San Fransisco London.

Scarborough, J.B. 1958. *Numerical Methemathical Analysis*. London: Baltimore
The Johns Hopkins Press.